Đáp án Toán cao cấp A1 (ngày thi 09/06/2017)

1. $z=\dfrac{2+i}{2-i}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i=\cos\theta+i\sin\theta,\qquad \theta=\arctan(4/3)\approx 0.927$ (0.5)

$$\sqrt[3]{z}=\left\{\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3},\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{3},\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right\}$$ (0.5)

2. $y'=\dfrac{6x^2\cos(3x^2-2)-\sin(3x^2-2)}{x^2}$ (1)

3. Điểm nghi ngờ: x=0. (0.25)

Để f liên tục tại mọi nơi thì f phải liên tục tại 0. Điều này xảy ra khi

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ (0.25)

$$k=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{16\cos 4x}{2}=8$$ (0.5)

Ta chỉ cần xét sự khả vi tại 0. (0.25)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}-8}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x-8x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x-16x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{16\cos 4x-16}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-64\sin 4x}{6}=0.$$ (0.5)

Vậy f khả vi tại mọi nơi. (0.25)

4. $a=3$. (0.5)

$\tan\omega=\dfrac{r}{r'}=\dfrac{1+3\sin\varphi}{3\cos\varphi}$; $\tan\omega=\infty$ khi $\cos\varphi=0$. Suy ra $\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. (0.25)

Có 2 điểm $(3,\pi/2),(-2,3\pi/2)$. (0.25)

5. $I=\displaystyle\int_1^3\left(-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{4}{3(x+4)}\right)dx$ (0.5)

$$=\left(-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{4}{3}\ln|x+4|\right)\Big|_1^3 \quad =-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{4}{3}\ln\frac{7}{5}$$ (0.5)

6. Ta có $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}},\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}>0$ với mọi $2<x\le 3$; $\quad \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}:\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=2$ (0.5)

$\int\limits_2^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x-2}}$ hội tụ nên $J=\int\limits_2^3 \dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh giới hạn. (0.5)

7. Chuỗi đã cho là chuỗi số dương và

$\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{(k+1)^2(2k+2)!}{3^{k+1}}:\dfrac{k^2(2k)!}{3^k}\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{3}=\infty>1$ (0.5)

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn tỷ số. (0.5)

8. Dùng tiêu chuẩn căn tổng quát $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\dfrac{k^2|2x+1|^k}{e^{2k}}}=\dfrac{|2x+1|}{e^2}$ (0.25)

Chuỗi hội tụ khi $|2x+1|<e^2$ và phân kỳ khi $|2x+1|>e^2$. (0.25)

Nếu $|2x+1|=e^2$ chuỗi trở thành $\sum\limits_{k=2}^{\infty}k^2$ hoặc $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k k^2$ phân kỳ theo TC phân kỳ. (0.25)

Vậy chuỗi hội tụ khi $\dfrac{-e^2-1}{2}<x<\dfrac{e^2-1}{2}$. (0.25)

9. $a_0=\dfrac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}2dx+\int_{\pi}^{2\pi}2xdx\right)=3\pi+2$ (0.25)

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi}2\cos nxdx+\int\limits_{\pi}^{2\pi}2x\cos nxdx\right)=\dfrac{2}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]$ (0.25)

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi}2\sin nxdx+\int\limits_{\pi}^{2\pi}2x\sin nxdx\right)=\dfrac{-2}{n\pi}(-1)^n+\dfrac{2}{n\pi}-\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n}(-1)^n$ (0.25)

Tại $x\ne k\pi, k\in\mathbb{Z}$, ta có khai triển Fourier

$f(x)=\dfrac{3\pi+2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{2}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]\cos nx+\left[\dfrac{-2}{n\pi}(-1)^n+\dfrac{2}{n\pi}-\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n}(-1)^n\right]\sin nx\right\}$ (0.25)